Leçon 159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Cadre : E est un K-ev de dimension finie $n \geq 1$.

1. Formes linéaires, espace dual. —

- Def : Une forme linéaire sur E est une application linéaire $f : E \to K$.
- Def : On note $E' := Lin(E, K)$ le dual de E, càd l'ensemble des formes linéaires sur E.
- Ex : Si $E = \mathbb{K}^n$, $(x_1, .., x_n) \mapsto x_i$ est une forme linéaire sur E.
  Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en a, $D_a f$ est une forme linéaire.
  $M \mapsto Tr(M)$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$
- Pro : $dim(E') \leq dim(E)$.
- Thm : L'application $A \in M_n(K) \mapsto (M \mapsto Tr(AM)) \in M_n(K)'$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Application du théorème.
- Pro : Une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.
- Théorème de représentation de Riesz : Soit E un espace de Hilbert. Pour tout f forme linéaire continue sur E, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(.) =< x, . >$, et l'application $f \mapsto x$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- App : Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on obtient ainsi $E \simeq E'$ via l'isomorphisme du Théorème de Riesz.
  Pour f forme linéaire sur E, on appelle alors vecteur gradient le vecteur $x \in E$ tel que $f(.) =< x, . >$.
- Def : Un hyperplan de E est un s-ev de dimension $n - 1$.
- Pro : Tout hyperplan H de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle.

2. Espace dual. —

1. *Espace dual, base duale.* —

- Def : Soit $B = \{e_1, .., e_n\}$ une base de E.
  $\forall 1 \leq i \leq n$, la forme linéaire e_i^* définie sur B par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ s'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i.
- Thm : Pour B une base de E, la famille $B' := \{e_1^*, .., e_n^*\}$ est une base de E', appelée base duale de B.
  On a ainsi $dim(E') = dim(E)$.
  Pour tout $f \in E'$, on a : $f(x) = \sum_i f(e_i)e_i^*(x)$.
- Ex : Pour la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $e_1^*((x, y)) = x$, $e_2^*((x, y)) = y$.
- Rem : L'isomorphisme donné par le théorème entre E et E' dépend de la base choisie, et n'est donc pas canonique.
- Ex : Pour $E = K_n[X]$, $a_1, .., a_n \in K$ distincts, et P_i les polynômes interpolateurs de Lagange des a_i, la famille (P_i) est une base de E, et on sa base duale associée est faite des $P_i^*(P) := P(a_i)$.
- Pro : Soient $\varphi_1, .., \varphi_r \in E'$ et $\varphi : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), .., \varphi_r(x)) \in K^r$. Alors φ est surjective ssi la famille $\{p_1, .., p_r\}$ est libre.

2. *Bidual et Bases antéduales.* —

- Def : Le bidual de E est le dual du dual de E. On le note E''.
- Théorème : L'application $x \in E \mapsto (f \in E' \mapsto f(x) \in K) \in E''$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
  Cet isomorphisme ne dépend pas de la base choisie (il est donc canonique), et on peut alors identifier E à E".
- Rem : En dimension infinie, cette application est injective mais pas forcément surjective.
- Pro : Soit $B' = (f_1, .., f_n)$ une base de E'. Alors il existe une unique base $(e_1, .., e_n)$ de E telle que $\forall 1 \leq i \leq n$, $f_i = e_i^*$.
  Cette base est appelée base antéduale de B'.
- Ex : Pour la base de $M_n(K)'$ donnée par les $f_{i,j} := Tr(E_{i,j}.) \in M_n(K)'$, la base antéduale est celle des $e_{i,j} := E_{j,i}$.

3. Application transposée et orthogonal d'une partie. —

1. *Orthogonalité au sens des formes linéaires.* —

- Def : $x \in E$ et $f \in E'$ sont dits orthogonaux ssi $f(x) = 0$.
- Ex : e_i est orthogonal à e_j^* $\forall i \neq j$.
- Def : Pour $A \subset E$, on définit l'orthogonal de A dans E' par $A^\perp := \{f \in E' \text{ tq } f(x) = 0 \forall x \in A\}$.
  Pour $B \subset E'$, on définit l'orthogonal de B dans E par $B^\circ := \{x \in E \text{ tq } f(x) = 0 \forall f \in B\}$.
- Pro : $A^\perp$ est un s-ev de E'. B° est un s-ev de E.
- Pro : Pour $A_1 \subset A_2 \subset E$, on a $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.
  Pour $B_1 \subset B_2 \subset E'$, on a $B_2^\circ \subset B_1^\circ$.
  $A^\perp = (Vect(A))^\perp$.
  $B^\circ = (Vect(B))^\circ$.
- Thm : Soit F un s-ev de E et G un s-ev de E'. On a :
  $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$ et $(F^\perp)^\circ = F$.
  $dim(G) + dim(G^\circ) = dim(E')$ et $(G^\circ)^\perp = G$.
- Rem : En dimension infinie, on a encore $(F^\perp)^\circ = F$, mais pas forcément $(G^\circ)^\perp = G$.
- App : Soit F un s-ev de E. on a $F = E \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.
- Cor : Equation d'un s-ev : Soient $f_1, .., f_p \in E'$ telles que $rg(f_1, .., f_p) = r$.
  Alors le s-ev $F := \{x \in E \text{ tq } f_i(x) = 0 \forall i\}$ est de dimension n-r.
  Réciproquement, si F est un s-ev de E de dimension q, il existe n-q formes linéaires $g_1, ..g_{n-q}$ de E' linéairement indépendantes telles que $F = \{x \in E \text{ tq } g_j(x) = 0 \forall j\}$.
- Ex : L'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur un hyperplan de E forme une droite vectorielle de E'.

- App : Soient A_1, A_2 deux s-ev de E. On a :
  $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ et $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$.
- Rem : Dans un espace de Hilbert, l'orthogonalité au sens des formes linéaires coïncide avec l'orthogonalité au sens du produit scalaire : Pour $f \in E'$ et $x \in E$ tq $f(.) =< x, . >$, on a $f(y) = 0 \Leftrightarrow < x, y >= 0$.

2. *Transposée d'une partie.* —

- Def : Soient E,F deux K-ev, et $u \in L(E, F)$. Pour tout $f \in F'$, on a $f \circ u \in E'$.
  L'application linéaire $f \in F' \mapsto f \circ u \in E'$ est appelée application transposée de u et est notée u^t.
- Pro : Si E,F sont de dimension finie, on a $rg(u) = rg(u^t)$, et $Im(u^t) = Ker(u)^\perp$.
  En dimension quelconque, on a $Im(u)^\perp = Ker(u^t)$.
- Pro : Pour E,F,G des K-ev, $u \in L(E, F)$,$v \in L(F, G)$ on a $(v \circ u)^t = u^t \circ v^t$.
- Pro : Soit $u \in End(E)$. Un s-ev F de E est u-stable ssi $F^\perp$ est u^t-stable.
- Pro : Dans un espace vectoriel euclidien, la transposée coïncide avec l'adjoint.
- Pro : Utilisation de la transposée dans des récurrences sur la dimension.
- Pro : Changement de base dans le dual.

4. Formes linéaires en analyse. —

- Théorème de Hahn-Banach géométrique : Soit E un espace vectoriel normé, F un s-ev de E, et A un ouvert convexe de E telle que $F \cap A = \emptyset$.
  Alors il existe un hyperplan H tel que $F \subset H$ et $H \cap A = \emptyset$.
- Cor : Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé, et C un convexe compact de E.
  Alors $x \in C$ ssi $\forall f \in E'$, $f(x) \leq \sup_C(f)$.
- **Dev** : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_2$.
- Diagonalisation des endomorphismes symétriques : Soit E un espace vectoriel euclidien de dim finie, et $f \in End(E)$ tel que $Mat(f, B) = Mat(f, B)^t$ dans une base orthonormée de E. Alors il existe une base orthonormée B' telle que tous les vecteurs de B' soient des vecteurs propres de f.
- **Dev** : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, et de racines complexes $\lambda_1, ;\lambda_r$, de multiplicités $\alpha_1, ;\alpha_r$.
  On pose $s_l := \sum_{i \geq r} \alpha_i \lambda_i^l$ pour $l \geq 0$, et $S_n((x_1, ;x_n)) := \sum_{i,k \leq n} s_{i+k} x_i.x_k$, qui est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
  Si (p, q) est la signature de S_n, on montre alors que P possède $p+q$ racines distinctes, dont $p - q$ exactement sont réelles.
- Inégalité de Hadamard : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $X_1, .., X_n$ les colonnes de M. Alors $det(M) \leq \|X_1\|_2..\|X_n\|_2$.
  Géométriquement, pour des arrêtes de longueur donnée, un hyper-parallélélépipède est de volume maximal s'il est un hyper-rectangle.

Références

Gourdon : Forme linéaire, dual, exemples. Hyperplan, exemples, ce sont des noyaux de formes lin. Forme linéaire coordonnée, base duale, exemple avec base canonique, exemple avec interpolateurs de Lagrange, Th de la base duale, isomorphisme non-canonique. Bidual, isomorphisme canonique, base antéduale, exemples. Elément orthogonal à une forme lin, orthogonal d'une partie de E,E', propriétés sur l'orthogonalité, application aux syst d'équations définissant un s-ev, l'ensembles des formes linéaires s'annulant sur un hyperplan est une droite vectorielle. Application transposée, écriture matricielle, rang, propriétés, applications à des démonstrations par récurrence. Th des extrema liés.
Objectif Agrégation : Une forme lin est soit nulle soit surjective, Th de Riesz sur un Hilbert qui donne un isom canonique.
Gantmacher (Tome 2) : Nombre de racines réelles d'un polynôme.(Dev)
Szpirglas : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.(Dev)
Rouvière : Th des extrema liés. Inégalité de Hadamard sur le déterminant et explication géométrique.
FGN (Algèbre 1) : Isomorphisme entre $M_n(K)$ et $M_n(K)'$.
Sans Ref : Dans un ev euclidien, l'orthogonal coïncide avec l'orthogonalité donnée par le th de Riesz. Si $K = \mathbb{R}$, la transposée est l'adjoint.

May 29, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes